

مبرهنة (5): من أجل أي $\alpha \in A$، G_α زمرة نصف طبولوجية فإن الجداء $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ يكون أيضاً زمرة نصف طبولوجية.

البرهان:

يجب البرهان على أن التطبيق $g: G \times G \to G$ حيث، $g(x,y) = xy$ مستمر من أجل أي نقطة (x,y) من $G \times G$.

لتكن W مجاورة ما للعنصر $(x_\alpha y_\alpha) = xy$ من G عندئذ توجد مجموعة مفتوحة ابتدائية مثل U بحيث يكون: $xy \in U \subseteq W$ ولتكن $U = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ حيث $U_\alpha = G_\alpha$ من أجل جميع $\alpha \in A$ باستثناء عدد منته من الأدلة. فإذا كانت B مجموعة الأدلة حيث $B \subseteq A$ $U_\alpha \neq G_\alpha$ فإن $\forall \alpha \in B$ يكون U_α مفتوحة في G_α.

بما أن G_α زمرة نصف طبولوجية وذلك من أجل أي $\alpha \in A \Leftarrow$ من أجل أي $\alpha \in B$ يكون $x_\alpha y_\alpha \in U_\alpha \Leftarrow$ توجد مجاورة V_α لـ y_α بحيث يكون: $x_\alpha V_\alpha \subseteq U_\alpha$

فإذا أخذنا V بالشكل التالي: $V = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ بحيث أن: $V_\alpha = G_\alpha$ من أجل $\alpha \in A - B$، فإن V تكون مجاورة للعنصر $y = (y_\alpha)$ ، لأن: $x_\alpha y_\alpha \in x_\alpha V_\alpha \subseteq U_\alpha$; $\alpha \in A$

ومنه: $xy \in xV \subseteq U \subseteq W$

ومنه نستنتج أن التطبيق g مستمر في y.

وبنفس الطريقة تماماً نبرهن أن g مستمر في x وبالتالي يكون مستمر في (x,y)

وبالتالي فإن $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ تكون زمرة نصف طبولوجية.

مبرهنة (6):

من أجل أي α فإن تطبيق الإسقاط P_α يكون مستمراً، هومومورفيزماً مفتوحاً من $G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ على الزمرة النصف طبولوجية G_α.

البرهان: من أجل أي $x, y \in G$ فإن: $P_\alpha(xy) = x_\alpha y_\alpha = P_\alpha(x) P_\alpha(y)$

أي أن P_α هو هومومورفيزم.

لنثبت على أنه غامر، من أجل أي عنصر $x_\alpha \in G$ فإن: $x = (x_\beta)_{\beta \in A}$ حيث $x_\beta = e_\beta$ من أجل أي $\beta \neq \alpha$ و $x_\beta = x_\alpha$ من أجل $\alpha = \beta$ فإنه يكون $P_\alpha(x) = x_\alpha$ أي أن P_α غامر.

ومن المعروف أن تطبيق الإسقاط مستمر ومفتوح ومنه ينتج المطلوب.



- مبرهنة (7) : اذا كانت G_α $(\alpha \in A)$ زمرة نصف طبولوجية متراصة من أجل أي α فإن $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ تكون أيضاً زمرة نصف طبولوجية متراصة.

- البرهان :

ينتج مباشرة من المبرهنة (5) ومن كون جداء فضاءات متراصة هو فضاء متراص.

* جمر زمرة ما في جداء زمر :

اذا كان من أجل أي α ($\alpha \in A$ مجموعة الأدلة) $G_\alpha = G$ فإن الجداء $\prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ يكتب بشكل مبسط G^A.

واضح أن G^A هي مجموعة كل التطبيقات من A في G.

اذا كانت G زمرة فإن G^A زمرة أيضاً.

الآن اذا كانت G زمرة فإن $A = G$ زمرة G^G زمرة

- مبرهنة (8) :

أي زمرة G يمكن أن تغمر في G^G بمعنى أنه يوجد تطبيق واحد لواحد من G على مجموعة جزئية من G^G.

- البرهان :

من أجل أي عنصر $a \in G$ ليكن ρ_a الانسحاب الداخلي اليميني من G على G، أي أن ρ_a :

$\rho_a : x \longrightarrow xa$ ، واضح أن $\rho_a \in G^G$ ، لنعرف التطبيق : $\eta_\rho : G \longrightarrow G^G$

$a \longrightarrow \rho_a$

واضح أن η_ρ هو تطبيق واحد لواحد من G على $\eta_\rho(G) \subseteq G^G$.

بمعنى آخر يمكن أن نطابق G مع مجموعة كل الانسحابات الداخلية اليمينية.

وبشكل مشابه يمكن أن نطابق G مع مجموعة كل الانسحابات الداخلية اليسارية.

- تعريف :

التطبيقين : $\eta_\rho : a \longrightarrow \rho_a$ و $\eta_\lambda : a \longrightarrow \lambda_a$ من G في G^G سوف نسميها الغمر القانوني اليميني (اليساري) من G في G^G على الترتيب ، في الحالة التي يكون فيها G زمرة تبديلية فإن : $\lambda_a = \rho_a$ وبالتالي $\eta_\rho = \eta_\lambda$.

- مبرهنة (9) : تقبل بدون برهان :
اذا كانت A مجموعة متراصة في الزمرة التبولوجية G فإن A^{-1} تكون أيضاً متراصة.
- تذكرة : تعريف :
يسمى الفضاء التبولوجي X فضاءً متراصاً محلياً إذا كانت كل نقطة x منه تملك مجاورة متراصة.
مبرهنة : اذا كان الفضاء التبولوجي X متراصاً محلياً و T_2 - فضاء (فضاء هاوسدورف)
فإنه من أجل أي نقطة x منه وأي مجاورة u لها توجد مجاورة متراصة v للنقطة x
بحيث يكون : $x \in v \subseteq u$.
- مبرهنة (10) :
اذا كانت G زمرة نصف طبولوجية وكان G فضاء هاوسدورف متراص محلياً عندئذ تكون
G زمرة طبولوجية.
- البرهان : من أجل ذلك يكفي أن نبرهن أن التطبيق $G \longrightarrow G$: g_2 حيث $g_2(x) = x^{-1}$
مستمر، لتكن u مجاورة مفتوحة للعنصر الحيادي e ، لنبرهن أولاً أنه توجد مجاورة متراصة
c للعنصر e بحيث يكون $c^{-1} \subseteq u$.
نفرض أن u مجاورة مفتوحة لـ e و G متراصة محلياً و T_2 - فضاء $\Leftarrow$ (حسب المبرهنة السابقة)
توجد مجاورة متراصة c بحيث يكون $c \subseteq u$ ولنفرض جدلاً أن $c^{-1} \not\subseteq u$ $\Leftarrow$
$c^{-1} \cap (G-u) \neq \emptyset$.
متممة u
c متراصة (حسب المبرهنة 9) $\Leftarrow$ c^{-1} متراصة ومغلقة و $G-u$ مغلقة ومنه
$c^{-1} \cap (G-u)$ مجموعة مغلقة وبالتالي فإن الأسرة $\{c^{-1} \cap (G-u)\}$
(عندما c تتحول على كل المجاورات المتراصة للعنصر e) تشكل أسرة مجموعات مغلقة
مجموعة متراصة مغلقة
$\cap c^{-1} \subseteq u \Leftarrow (\cap c^{-1}) \cap (G-u) \Leftarrow \cap (c^{-1} \cap (G-u)) \neq \emptyset$ (متممة u)
لكن $\cap (c^{-1} \cap (G-u)) \neq \emptyset$ $\cap c^{-1} = \{e\}$ (حيث c تتحول على جميع المجموعات
المتراصة الحاوية لـ e)
$$\cap (c^{-1} \cap (G-u)) = (\cap c^{-1}) \cap (G-u) \subseteq \cap c^{-1} = \{e\}$$
$$\{e\} = \cap (c^{-1} \cap (G-u)) \Rightarrow e \in G-u$$
وهذا يناقض الفرض ($e \in u$) أي أن : $c^{-1} \subseteq u$
لنبرهن الآن أن g_2 مستمر، لتكن w مجاورة للعنصر x^{-1} $\Leftarrow$ لها x مجاورة للعنصر



الحيادي e وحسب النتيجة الأخيرة من هذه البرهنة توجد مجاورة مفتوحة C للعنصر e بحيث يكون $C^{-1}CxW \Leftarrow x^{-1}C^{-1}\subseteq W$ $g_2(x)=(Cx)^{-1}\subseteq W$ هذا يعني أن g_2 تطبيق مستمر في x ومن أجل أي $x\in G$: $g_2(Cx)=(Cx)^{-1}$.

*** النظريات العامة في الزمر الطبولوجية:**

سوف ندرس في هذا الفصل النظريات العامة المتعلقة بالزمر الطبولوجية. موضوعات الفصل هي الزمر الطبولوجية، الزمر الجزئية، زمر القسمة وجداء الديكارتي للزمر الطبولوجية والزمر المترابطة.

- النقل أو التحويل في الزمر الطبولوجية:

مبرهنة 1: لتكن G زمرة ما و T طبولوجيا على G فإن T تكون زمرة طبولوجية إذا وفقط إذا كان التطبيق: $g_3: G\times G \longrightarrow G$ من $G\times G$ في G مستمراً في كلا المتحولين

$(x,y) \longrightarrow xy^{-1}$

- البرهان: لنفرض أولاً أن G زمرة طبولوجية ولنبرهن استمرار التطبيق g_3: $xy \longleftarrow (x,y^{-1})$: g_3 لتكن W مجاورة للعنصر xy^{-1} وبما أن G هي زمرة طبولوجية فإن g_1 مستمر $\Leftarrow$ توجد مجاورة U للعنصر x ومجاورة V للعنصر y^{-1} بحيث يكون $U.V\subseteq W$.

وبما أن G زمرة طبولوجية فإن التطبيق g_2 مستمر $\Leftarrow$ توجد مجاورة V_1 للعنصر y بحيث يكون $V_1^{-1}\subseteq V$.

$V_1^{-1}\subseteq V \Rightarrow UV_1^{-1}\subseteq UV\subseteq W$

أي أنه من أجل المجاورة W للعنصر xy^{-1} أوجدنا مجاورة U للعنصر x ومجاورة V_1 للعنصر y بحيث يكون $UV_1^{-1}\subseteq W$ أي أن g_3 مستمر.

العكس: لنفرض أن g_3 تطبيق مستمر ولنبرهن على استمرار g_1 و g_2 بما أن التطبيق g_3 مستمر في أي نقطة (x,y) من $G\times G$ فهو مستمر في النقطة (e,y) أي أنه: من أجل أي مجاورة W للعنصر y^{-1} $\Leftarrow$ $g_3(e,y)=ey^{-1}=y^{-1}$ توجد مجاورة V للعنصر y بحيث يكون $eV^{-1}\subseteq W \Leftarrow V^{-1}\subseteq W$ (أي أنه من أجل أي مجاورة W لـ y^{-1} أوجدنا مجاورة V للعنصر y بحيث يكون $V^{-1}\subseteq W$) فهذا يعني أن g_2 مستمر.

بما أن $x\,y \longrightarrow (x,y^{-1}) : g_3$ مستمر (حسب تعريف الاستمرار) فمن أجل أي مجاورة W لـ xy توجد مجاورة U للعنصر x و V للعنصر y^{-1} بحيث يكون: $U.V^{-1}\subseteq W$ ← مجاورة لـ y

$\Leftarrow$ أن g_1 مستمر في أي النقطة xy (x,y) وبالتالي فإن G زمرة طبولوجية.